Proceedings of IAM, V.11, N.1, 2022, pp.39-44

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПО ЧАСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗЦИИ С НАЧАЛЬНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ*

И.А. МАГЕРРАМОВ

Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан

e-mail: ilkin_072@mail.ru

Абстракт. Рассматривается решение по части периодической дискретной задачи оптимального управления с начальными управляющими воздействиями. С помощью дискретного уравнения Эйлера-Лагранжа предлагается алгоритм для нахождения программных оптимальных траекторий и управлений. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: периодическая оптимизация, уравнения Эйлера-Лагранжа, разностное уравнение, квадратичный функционал

AMS Subject Classification: 49N10, 49N20, 65F10.

Введение. Как известно [1, 2] движение газа и газожидкостной смеси в газлифтном процессе описывается то дифференциальными, то конечно-разностными уравнениями, где такое описание осложняет разработку «однородного» алгоритма. А это создает трудности получения решения требующего достаточной точности [4]. Исходя из этих фактов в настоящем работе рассматриваются задачи дискретного по части периодического оптимального управления. Далее, с помощью дискретного уравнения Эйлера-Лагранжа [7], приведен решение данной задачи. Результаты иллюстрируется простым числовым примером, возникающем при управлении газлифтного процесса.

Постановка задачи. Пусть движение объекта описывается на интервалах $[0, l+0)$, $(l-0, l+0)$ и $(l+0, 2l]$ со следующими разностными уравнениями

$$y(x_{i+1}) = f_1(y(x_i), x_i), \qquad y(0) = u\,, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \tag{1}$$
$$y(x_{l+0}) = F_\delta y(x_{l-0}) + V\,, \qquad x_{l-0} < l < x_{l+0} \tag{2}$$
$$y(x_{i+1}) = f_2(y(x_i),\, x_i), \qquad x_{l+0} < x_i < 2l \tag{3}$$

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики БГУ 14.06.2022

Здесь $y-$ n-мерный фазовый вектор, начальное управление u – n-мерный постоянный вектор, f_1, f_2 вектор-функции – размерности n и кусочно-постоянные, а F_δ, Vзаданные постоянные векторы.

Требуется найти управление u таким образом, чтобы следующий функционал

$$J = u^T Ru + y^T(x_{l+0})Qy(x_{l+0}) + \sum_{x_i=x_0}^{2l} L(y(x_i), x_i) \tag{4}$$

получил бы минимальное значение при условии частичной периодичности $y(x_i)$ в точках x_{l+0} и $2l$, т.е.

$$y(x_{l+0}) = y(2l), \tag{5}$$

где $R = R^T > 0$, $Q = Q^T < 0$ постоянные матрицы размерности $n \times n$, $L(y(x_i), x_i)$ заданная функция, T - знак транспонирование.

Метод Лагранжа для решения задачи (1)-(5).

Составляя расширенный функционал [7] для оптимизационной задачи (1)-(5) имеем следующие дискретные уравнения Эйлера-Лагранжа

$$2Ru - \lambda(0) = 0, \tag{6}$$

$$\lambda(x_i) + \frac{\partial L(y(x_i),x_i)}{\partial y} - \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1})\frac{\partial f_1(y(x_i),x_i)}{\partial y} = 0, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \tag{7}$$

$$\lambda(x_i) + \frac{\partial L(y(x_i),x_i)}{\partial y} - \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1})\frac{\partial f_2(y(x_i),x_i)}{\partial y} = 0, \quad x_{l+0} < x_i < 2l \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda(x_{l-0}) = Qy(x_{l-0}) + F_\delta \lambda(x_{l+0}) \\ y(x_{l+0}) = F_\delta y(x_{l-0}) \end{array}\right\} \tag{9}$$

$$\lambda(x_{l+0}) = \lambda(2l) \tag{10}$$

Здесь $\lambda(x_i)$ Лагранжевый множитель. Итак, решив разностные уравнения (1)-(3), (7)-(9) с граничными условиями (5), (6), (10) имеем искомое решение соответствующей оптимизационной задачи.

Построение программных траекторий и управлений. Сначала из (6) находим управление u через $\lambda(0)$ в следующем виде

$$y(0) = u = \frac{1}{2}R^{-1}\lambda(0), \tag{11}$$

где используя последнее в (1), (3) и (7), (8) имеем на $(0, x_{l-0})$

$$\left.\begin{array}{c} y(x_{i+1}) = f_1(y(x_i), x_i), \quad y(0) = \frac{1}{2}R^{-1}\lambda(0), \\ \lambda(x_i) = -\frac{\partial L(y(x_i),x_i)}{\partial y} + \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1})\frac{\partial f_1(y(x_i),x_i)}{\partial y}, \end{array}\right\} \tag{12}$$

а в $(x_{l+0}, 2l)$

$$\left.\begin{array}{c} y(x_{i+1}) = f_2(y(x_i), x_i), \\ \lambda(x_i) = -\frac{\partial L(y(x_i),x_i)}{\partial y} + \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1})\frac{\partial f_1(y(x_i),x_i)}{\partial y}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Таким образом, требуется найти решение (12), (13), с условиями (5), (10), (11). Здесь имеются по части периодичности условия (5) и (10)

$$y(x_{l+0}) = y(2l), \quad \lambda(x_{l+0}) = \lambda(2l). \tag{14}$$

Итак, решение задачи дискретного граничного оптимального управление (1)-(5) сводится к решению краевой задачи (12), (3), (9) с неразделенными граничными условиями (11), (14) где для ее решения имеются хорошо разработанные алгоритмы, такие как метод квазилинеаризации [3,6].

Пример. Для простоты рассмотрим линейный случай. Тогда уравнение движения газа и газожидкостной смеси, усредненной по времени имеет вид [4, 5]

$$\dot{Q}(x) = \frac{2a\rho F Q^2(x)}{c^2\rho^2F^2\mu - Q^2(x)} = f(\mu) \tag{15}$$

где μ -малый параметр. Используем метод квазилинеаризации [6]. Разлагая $f(\mu)$ в ряд Маклерона и взяв в (15) нулевое приближение $f(0)$ получим

$$\dot{Q}(x) = -2a\rho F. \tag{16}$$

Далее, используя $\dot{Q}(x_i) \approx \frac{Q(x_{i+1}) - Q(x_i)}{h}$, где $h = x_{i+1} - x_i = \frac{l}{N}$, $x_0 = 0$ из (16) получим следующую задачу, подобно (1)-(5):

$$Q(x_{i+1}) = Q(x_i) - 2a\rho F h, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \tag{17}$$

$$Q(x_0) = Q(0) = u \tag{18}$$

$$Q(x_{l+0}) = F_\delta Q(x_{l-0}) + V, \quad x_{l-0} < l < x_{l+0} \tag{19}$$

$$Q(x_{i+1}) = Q(x_i) - 2a\rho F h, \quad x_{l+0} < x_i < 2l \tag{20}$$

$$\alpha Q(x_{l+0}) = Q(2l), \quad 0 < \alpha < 1 \tag{21}$$

Допустим, что $x_{l-0} = l - h_1$, $x_{l+0} = l + h_1$, где $0 < h_1 \ll h$. Здесь в качестве функционала (4) для простоты возьмем

$$J = u^T R u. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что

$$Q(x_i) = Q(0) - 2a\rho F \cdot ih, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \tag{23}$$

а

$$Q(x_{l-0}) = Q(0) - 2a\rho F \cdot (N-1)h - 2a\rho F h_1. \tag{24}$$

Аналогично, получим

$$Q(x_i) = Q(x_{l+0}) - 2a\rho F h_1 - 2a\rho F(i-1)h, \quad x_{l+0} < x_i < 2l. \tag{25}$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для задачи (17)-(21) будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} 2Ru - \lambda(0) = 0 \\ Q(x_{i+1}) = Q(x_i) - 2a\rho Fh, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \\ Q(0) = u \\ Q(x_{l+0}) = F_\delta Q(x_{l-0}) + V \\ Q(x_{l+1}) = Q(x_i) - 2a\rho Fh, \quad x_{l+0} < x_l < 2l \\ \lambda Q(x_{l+0}) = Q(2l) \\ \lambda(x_{l-0}) = F_\delta \lambda(x_{l+0}) \\ \lambda(x_{l+0}) = \alpha\, \lambda(2l) \\ \lambda(x_{i+1}) = \lambda(x_i) \qquad 0 < x_i < x_{l-0} \\ \lambda(x_{i+1}) = \lambda(x_i) \qquad x_{l+0} < x_i < 2l \end{cases} \tag{26}$$

Решая дискретные уравнения в (26) получим

$$\begin{cases} Q(x_i) = Q(0) - 2a\rho F \cdot ih \qquad 0 < x_i < x_{l-0} \\ Q(x_i) = Q(x_{l+0}) - 2a\rho Fh_1 - 2a\rho f(i-1)h \qquad x_{l+0} < x_i < 2l \\ \lambda(x_i) = \lambda(0) \qquad 0 < x_i < x_{l-0} \\ \lambda(x_i) = \lambda(x_{l+0}) \qquad x_{l+0} < x_i < 2l \end{cases} \tag{27}$$

Далее, из (26) и (27) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $Q(0), \lambda(0), Q(x_{l-0}), \lambda(x_{l-0}), Q(x_{l+0}),\ \lambda(x_{l+0}), Q(2l)$ и $\lambda(2l)$:

$$\begin{cases} Q(x_{l-0}) = Q(0) - 2a\rho F(N-1)h - 2a\rho Fh_1 \\ Q(2l) = Q(x_{l+0}) - 2a\rho Fh_1 - 2a\rho F(N-1)h \\ Q(x_{l+0}) = F_\delta Q(x_{l-0}) + V \\ \lambda(x_{l-0}) = F_\delta \lambda(x_{l+0}) \\ \alpha Q(x_{l+0}) = Q(2l) \\ \lambda(x_{l+0}) = \alpha\lambda(2l) \\ \lambda(x_{l-0}) = \lambda(0) \\ \lambda(2l) = \lambda(x_{l+0}) \end{cases} \tag{28}$$

Таким образом, решая СЛАУ (28), мы можем найти искомые неизвестные, а далее программную траекторию и управление.

Литература

1. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах // Нелинейные колебания, 2014, т.17, No 2, с . 151 - 160.

2. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом. // Доклады НАН Азербайджана, том LXV, №5, 2009, с.9-18.
3. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989, 320 с.
4. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикладная механика, 2010, т. 46, № 6, с.113-122.
5. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. // Докл. НАН Азербайджана, 2008, №4, с.30-41.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.М.: Мир, 1968, 183 с.
7. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972, 554 с.

SOLUTION ALGORITHM FOR A PERIODIC DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEM WITH INITIAL CONTROL ACTIONS

I. A. MAHARRAMOV

ABSTRACT

The solution of a periodic discrete optimal control problem with initial control actions is considered. Using the discrete Euler-Lagrange equation, an algorithm is proposed for finding software optimal trajectories and controls. The results are illustrated by an example.

Keywords:. periodic optimization, Euler-Lagrange equations, quadratic functional, difference equation

AMS Subject Classification: 49N10, 49N20, 65F10.

References

1. Aliev F.A., Ismailov N.A. Zadachi optimizacii s periodicheskim kraevym usloviem i granichnym upravleniem v gazliftnyh skvazhinah // Nelinejnye kolebanija, 2014, t.17, No 2, c . 151 - 160Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimization problems with a periodic boundary condition (and boundary control in gas-lift wells, Nonlinear Oscillations, V.17, N.2, 2014, pp.151-160.)
2. Aliev F.A., Mutallimov M.M. Algoritm dlya resheniya zadachi postroeniya programmnykh traektorii i upravleniya pri dobyche nefti gazliftnym sposobom. // Doklady NAN Azerbaydzhana, tom LXV, №5, 2009, s.9-18.(Aliev F.A., Mutallimov M.M. Algorithm for solving the problem of constructing software

trajectories and control in oil production by gas lift, Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, V. LXV, N.5, 2009, pp. 9-18.)

3. Aliev F.A. Metody resheniya prikladnykh zadach optimizatsii dinamicheskikh sistem. Baku: Elm, 1989, 320 s.(Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems. Baku: Elm, 1989, 320 p).
4. Aliev F.A., Il'yasov M.Kh., Nuriev N.B. Zadachi modelirovaniya i optimal'noy stabilizatsii gazliftnogo protsessa // Prikladnaya mekhanika, 2010, t. 46, № 6, s.113-122.(Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Nuriev N.B. Problems of modeling and optimal stabilization of the gas lift process, Applied Mechanics, V. 46, N.6, 2010, pp.113-122.)
5. Aliev F.A., Il'yasov M.Kh., Dzhamalbekov M.A. Modelirovanie raboty gazliftnoy skvazhiny. // Dokl. NAN Azerbaydzhana, 2008, №4, s.30-41.(Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Jamalbekov M.A. Simulation of gas-lift well operation. // Dokl. Azerbaijan National Academy of Sciences, N. 4, 2008, pp. 30-41.)
6. Bellman R., Kalaba R.Kvazilinearizatsiya i nelineynye kraevye zadachi.M.: Mir, 1968, 183 s.(Bellman R., Calaba R. Quasi-linearization and nonlinear boundary value problems. Moscow: Mir, 1968, 183 p.)
7. Brayson A., Kho Yu-shi. Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya. Moskva: Mir, 1972, 554 s.(Bryson A., Ho Yu-shih. Applied theory of optimal control. Moscow: Mir, 1972, 554p.)